一般相対性理論に関するリーマン計量の変形について (偏微分方程式の解の幾何)

山田, 澄生

数理解析研究所講究録
第 1896 巻 2014 年 137-149

一般相対性理論に関するリーマン計量の変形について

山田澄生
(学習院大理学部)

1 はじめに

一般相対性理論における時空とは、ローレンツ多様体 $(N^4, \mathbf{g})$ のことを指す. ここで N は 4 次元多様体、$\mathbf{g}$ は $(3,1)$ 型のローレンツ計量で、アインシュタイン方程式

$$R_{ab}-\frac{1}{2}R\,\mathbf{g}_{ab}=T_{ab} \tag{1}$$

の解である. R_{ab} は $\mathbf{g}$ のリッチ曲率、R は $\mathbf{g}$ のスカラー曲率 (リッチ・スカラー曲率ともよばれる) そして T_{ab} はエネルギー・運動量テンソルである. T が恒等的にゼロの場合、$R_{ab}-\frac{1}{2}R\,\mathbf{g}_{ab}=0$ は真空アインシュタイン方程式とよばれる. これは $R_{ab}=0$ と同値であり、つまり真空の宇宙はリッチ平坦な 4 次元ローレンツ多様体に他ならない. 曲率テンソル自体がゼロである平坦なローレンツ多様体は、(局所的には) ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ に限られるという剛性定理がしたがうので、真空アインシュタイン方程式は、自明 (trivial) な方程式の次に単純な方程式であることに注意する.

本論稿では方程式の右辺が以下の形をしている時を考える.

$$T_{ab}=-\left(F_{ac}F_{b}^{c}+\frac{1}{4}F_{cd}F^{cd}\mathbf{g}_{ab}\right)$$

この電磁テンソル F は 2 次形式として振る舞い、マックスウェル方程式

$$\operatorname{div}F=\mathcal{J},\qquad dF=0$$

の解である. ここで $\mathcal{J}$ は 4 元電流密度 $(\rho,\mathbf{j})$ である. この方程式はアインシュタイン・マックスウェル方程式とよばれる.

アインシュタイン方程式およびアインシュタイン・マックスウェル方程式は、Hilbert-Einstein 汎関数

$$\mathcal{H}(\mathbf{g}) = \int_N \{R_{\mathbf{g}} + L\}\, d\mu_{\mathbf{g}}$$

のオイラー・ラグランジュ方程式である．ここで L は重力場（曲率）以外に由来する場のラグランジアンである．アインシュタイン・マックスウェル方程式の場合は L は $F^{ab}F_{ab}$ である．

2 アインシュタイン・マックスウェル方程式の厳密解

真空アインシュタイン方程式のもっとも単純な厳密解は

$$\mathbf{g} = -dt^2 + \delta, \qquad N^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

である．ただし δ は $\mathbb{R}^3$ 上の標準計量 $dx^2 + dy^2 + dz^2$ とする．

次の真空アインシュタイン方程式の厳密解は、一般相対性理論の中で最も重要なアインシュタイン計量である Schwarzschild 解 (1916) である：

$$\mathbf{g} = -v^2dt^2 + u^4\delta, \qquad N^4 = \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus B\right)$$

ただし $B = B_{m/2}(0)$ および

$$v = \frac{1 - m/2r}{1 + m/2r}, \qquad u = 1 + \frac{m}{2r}$$

とする．ここではパラメーター m に関しては、$m \geq 0$ を仮定する．

上の表示においては計量の定義域は、外部領域とよばれるブラックホールの外側の部分になっている．つまり全ての事象は光速よりも速く伝播しないという因果関係 (Causality) のもとで、われわれ観測者が観測可能な事象の起こりうる時空の部分集合のことを指す．言い換えると $r = m/2$ で定義される 4 次元時空内の超曲面は、その内部から外部に情報が伝播しない（よって「黒い」）領域の境界と捉えることができる．

アインシュタイン・マックスウェル方程式の厳密解としては Reissner-Nordström 時空（の外部領域）(1918) が以下で与えられる：

$$\mathbf{g} = -v^2dt^2 + u^4\delta, \qquad N^4 = \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus B\right)$$

ただし $B = B_{\sqrt{m^2-q^2}/2}(0)$ および

$$v = \frac{1-(m^2-q^2)/4r^2}{1+m/r+(m^2-q^2)/4r^2}, \qquad u = \sqrt{1+\frac{m}{r}+\frac{m^2-q^2}{4r^2}}$$

ここで電場および磁場は

$$E = u^{-6}\nabla\left(\frac{q}{r}\right), \qquad B \equiv 0.$$

で定まる．ここで ∇ はユークリッド計量に関する gradient とする。因果関係 (Causality) が成立しない、いわゆる「裸の特異点」の出現を避けるために $m \geq |q|$ を仮定する．$q = 0$ のときは，　Reissner-Nordström 解は Schwarzschild 解と一致する．

アインシュタイン・マックスウェル方程式の厳密解である Majumdar-Papapetrou 解 (1947) は以下で時空を定義する：

$$\mathbf{g} = -u^2dt^2 + u^{-2}\delta \qquad N^4 = \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3 \setminus \cup_{i=1}^N\{p_i\}\right),$$

ただし

$$u = \left(1+\sum_{i=1}^N m_i/r_i\right)^{-1}, \qquad E = \nabla\log u, \qquad B \equiv 0.$$

で定義され、また $m_i > 0$ は各ブラックホールの質量および電荷を表わし、また r_i は、点 p_i からのユークリッド距離とする．$N = 1$ のときは、最大荷電ブラックホール解 (extremal Reissner-Nordström solution) $m = |q|$ と一致する．

Schwarzschild 解、Reissner-Nordström 解および Majumdar-Papapetrou 解は、 静的解である．つまり時空 $(N^4, \mathbf{g})$ が直積構造 $(\mathbb{R}\times\Sigma^3, -dt^2+g^{(3)})$ を持つ．ここで $(\Sigma^3, g^{(3)})$ は 3 次元リーマン多様体である． 静的解に関しては以下の一意性が知られている．

Theorem 1 (Chrusciel, Heusler, Bunting, Masood-ul-Alam, Tod, [4] 参照). アインシュタイン・マックスウェル方程式の静的解は *Reissner-Nordström* 解および *Majumdar-Papapetrou* 解に限る．

アインシュタイン・マックスウェル方程式の静的解は、時間軸 $\mathbb{R}$ の平行移動に付随する時空の対称性から、以下の形を同値である：計量

$$ds^2 = -V^2dt^2 + g,\ \ A = \phi dt$$

が以下の楕円型偏微分方程式系

$$\begin{aligned} R_{ij} &= V^{-1}\nabla_i\nabla_j V - 2V^2\nabla_a\phi\nabla_b\phi + V^{-2}|\nabla\phi|^2 g_{ij} \\ \triangle_g V &= V^{-1}|\phi|^2 \\ \triangle_g \phi &= V^{-1}\nabla_a\nabla^a\phi \end{aligned}$$

を満たす．ただしこれらの方程式は空間的超曲面 $\Sigma^{(3)} := \{t = \text{ const. }\}$ $(i = 1,2,3)$ 上で定義され、また $V > 0$ は境界値条件

$$V \to 1 \text{ as } x \to \infty \text{ and } V|_{\partial\Sigma} = 0$$

を満たす．一般に楕円型方程式は一意性定理と相性が良いが、実際にこれらの静的解の一意性もポテンシャル関数 V の一意性から誘導される．

3 コーシー問題としてのアインシュタイン方程式

リーマン多様体とその上に定義されたテンソル場からなる (M, g, k, E, B) がアインシュタイン・マックスウェル方程式 $R_{ab} - \frac{1}{2}R\,\mathbf{g}_{ab} = T_{ab}$ のコーシー初期条件であるとは、

$$\mu := T(N,N) = \frac{1}{2}(R^{(3)} + (\mathrm{tr}k)^2 - |k|^2)$$

$$J := T(N,\cdot) = \mathrm{div}(k - (\mathrm{tr}k)g),$$

$$\mathrm{div}E = 0,\ \ \mathrm{div}B = 0$$

が成り立つことを言う．ただし N は時間的単位ベクトルで M と直交しているもので、μ はエネルギー密度、J は運動量密度である．この２つの量は M 上に定義されている E と B から一意的に定まる．ちなみに真空アインシュタイン方程式の場合は $\mu = 0$: tr^2(Gauss eqn), $J = 0$: tr(Codazzi eqn) である．

優エネルギー条件とは

$$\mu \geq |J + 2E \times B| + |E|^2 + |B|^2$$

を指す．ここでは M が N^4 内で全測地線的部分多様体である $k = 0$ という状況で、かつ磁場がない $B \equiv 0$ ことを仮定して話を進める．このときに優エネルギー条件は

$$R^{(3)} \geq 2\|E\|_g^2.$$

という M^3 上に定義されたデータのみによって記述される．ここで $R^{(3)}$ は 3 次元リーマン計量 g のスカラー曲率を表す．このとき、(M, g, E) を時間対称性を持つコーシー初期条件とよぶ．時間対称性とは、この初期条件のもとには過去への発展と未来への発展が一致するという理由からである．上で見た静的解の時間一定スライスは，皆時間対称性を持つコーシー初期条件である．

一般的な状況において以下のコーシー問題の時間局所的可解性の結果が知られている．

Theorem 2 (Choquet-Bruhat–Geroch [12] 参照). (M, g, k) がアインシュタイン方程式のコーシー初期条件であるとき、アインシュタイン方程式の解として (M^3, g) が等長的に埋め込まれていて、その外的曲率が k で与えられているローレンツ多様体 $(N^4, \mathbf{g})$ が存在する．

調和座標系という特別なゲージを択ぶことで、アインシュタイン方程式は 2 階準線形双曲型方程式系として表され、その時間局所解の存在は、スケーリングおよび不動点定理から導かれる．ここでローレンツ多様体は $N^4 \cong^{\mathrm{diff}} M^3 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ の形をしていることを注意しておく．

アインシュタイン方程式の代わりにアインシュタイン・マックスウェル方程式で上と同様の結果が知られている．

Corollary 3. (M, g, k, E, B) がアインシュタイン・マックスウェル方程式のコーシー初期条件であるとき、その解として (M^3, g) が等長的に埋め込まれていて、その外的曲率が k で与えられているローレンツ多様体 $(N^4, \mathbf{g})$ が存在する． さらに N 上には M 上に E と B を誘導する電磁テンソル F が存在する．

これらのコーシー問題としてのアインシュタイン方程式の定式化は以下の部分多様体に関する古典的な結果の一般化としてとらえることが自然である．

Theorem 4 (空間内の超曲面に関する基本定理 (Bonnet)). n 次元多様体とその上に定義された正定値対称テンソル g および対称テンソル k からなる埋め込みに関するデータの組 (M, g, k) が以下の関係を満たすとする：

$$\begin{cases} R_{ijkl} = k_{ij}k_{kl} - k_{il}k_{jk} & (\textit{Gauss equation}) \\ D_i k_{jk} - D_j k_{ik} = 0 & (\textit{Codazzi equation}). \end{cases}$$

このときに、g を第 1 基本形式、k を第 2 基本形式として持つ埋め込み $\iota : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が存在し、それは（ユークリッド空間の回転と平行移動をのぞいて）一意的に定まる．

ここでは外在的な空間はユークリッド空間であるが、これはリーマン曲率テンソルが完全に消えている状況であり、一方で真空アインシュタイン方程式の場合、リッチ曲率テンソル（リーマン曲率テンソルのトレースをとったもの）が消えている状況がアインシュタイン計量である．優エネルギー条件においては、このことに対応して Gauss 方程式と Codazzi 方程式のトレースをとったものが現れていることに注意する．

上の初期条件 (M, g, E) が漸近平坦であるとは、あるコンパクトな部分集合 $K \subset M$ が存在して、$M \setminus K$ が、互いに素な $\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$ に同相な有限個のエンドから成り立っており、各エンドと同一視された $\mathbb{R}^3$ の誘導する座標系によって g と E を表わした場合に以下の減衰度が成り立っていることをいう：

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O_1(r^{-1}), \qquad E = O(r^{-2}).$$

この状況においては、アインシュタイン方程式の解をハミルトン系として解釈することができ、その不変量（ハミルトニアン）として ADM 質量および全電荷が以下で定義される：

$$m = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu^j$$

$$q_e = \frac{1}{4\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} E \cdot \nu, \qquad q_b = \frac{1}{4\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} B \cdot \nu.$$

4　ブラックホール解における極小曲面

時間対称的なコーシー初期条件で最も自明なものとして $N^4 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ 上に定義される Schwarzschild 解

$$\mathbf{g} = -v^2 dt^2 + u^4 \delta, \qquad v = \frac{1 - m/2r}{1 + m/2r}, \quad u = 1 + \frac{m}{2r}$$

(ただし $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) の時間一定超曲面

$$\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{r = 0\}, (1 + \frac{m}{2r})^4 \delta\right)$$

がある．いま $\{r = 一定\}$ 2 次元球面の面積を $A(r)$ とすると

$$A(r) = 4\pi r^2 (1 + \frac{m}{2r})^4$$

なので$A(r)$は$r = m/2$で最小値をとることが確かめられる．実際Schwarzschild計量の$\{t = 定数\}$超曲面はFlamm Paraboloidとよばれる4次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w)\}$内の3次元放物面

$$r = \frac{1}{2m}w^2 + \frac{m}{2} \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

と等長的であることが知られており、$w = 0$のとき、半径が$m/2$のくびれが安定（面積汎関数の第2変分が正）な極小曲面になっていることが見て取れる．またこのモデルは、$(r, w) \mapsto (r, -w)$という、$\{t = 定数\}$に制限されたSchwarzschild計量の$\mathbb{Z}_2$対称性を具現化している．

一般に、アインシュタイン・マックスウェル方程式のコーシー初期値(M, g)で時間対称的なものは、その時間発展として得られる解（ローレンツ計量）の外部領域の境界（＝ブラックホール領域の境界）は3次元超曲面であるが、そのMとの断面はMの複数(N個)の極小球面の集まりであることが知られている．またこのとき（ある1つのエンドに対する）外部領域の位相は自明、つまり$\mathbb{R}^3 \setminus \cup_{i=1}^N B^3$と同相である．

M^3内には極小球面が幾つか存在しうるが、我々が興味があるのは、観測可能な領域のみなので、その内で最外的(outermost)なものに限る．よってブラックホールの境界をなす極小球面の集合（ブラックホール水平線）は必然的に安定的である．(cf. Flamm Paraboloid)

いまΣ^2を(M, g)のブラックホール水平線とするとき、Σの面積をAとしたとき

$$r_0 = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

でΣの面積半径(area radius)と定義する．

5 正質量定理、Penrose不等式およびその一般化

以下ではアインシュタイン方程式をハミルトン系として見た時の保存量（ハミルトニアン）であるADM質量、総電荷、そして面積半径の間に成り立つ不等式([8]の解説を参照)を紹介する．まず正質量定理はADM質量が非負であることをいう．以下の命題より強い主張が成り立つが、ここでは時間対称的な状況に限る．

Theorem 5 (Schoen–Yau [10, 11] 1979-81, Witten [14] 1981). *(M, g)を、優エネルギー条件（$R_g \geq 0$）を満たす漸近平坦な時間対称的なアインシュタイン方程式のコーシー初期条件とするとき、ADM質量mは非負である．また$m = 0$のとき、(M, g)は$(\mathbb{R}^3, \delta)$と等長的である．*

次にアインシュタイン・マックスウェル方程式の時間対称的なコーシー初期条件に関する不等式：

Theorem 6 (Gibbons, Hawking, Horowitz, Perry, [3]1983). (M, g, E, B) を、*Dominant Energy Condition* $(R_g \geq 2\|E\|^2)$ を満たす漸近平坦な時間対称的なアインシュタイン方程式のコーシー初期条件とするとき、以下の不等式が成り立つ：

$$m \geq \sqrt{q_e^2 + q_b^2}$$

更に等式のときは (M, g, E, B) は *Majumdar-Papapetrou* 解の $\{t = \text{一定}\}$ 超曲面に等長的である.

これは ADM 質量の一部が、外部領域の電磁場を誘引している総電荷／磁荷に起因していることを述べている不等式である. 次の Penrose 不等式はブラックホールの存在が、極小曲面の面積として ADM 質量の下界となっていることを述べる：

Theorem 7 (Bray [1], Huisken/Ilmanen [5] 2001). (M, g) を、*Dominant Energy Condition* $(R_g \geq 0)$ を満たす漸近平坦な時間対称的なアインシュタイン方程式のコーシー初期条件とする. さらに M のある漸近的平坦なエンドの *ADM* 質量を m、そのエンドに対する最外的極小曲面の面積半径を r_0 とするとき、

$$m \geq \frac{r_0}{2},$$

さらに等式のときは、(M, g) は *Schwarzschild* 解の $\{t = \text{一定}\}$ 超曲面に等長的である.

上の等式が Schwarzschild 解の特徴付けになっていることから、その一般化として Jang [6] (1979) および Gibbons [2] (1983) は pure electric $(B \equiv 0)$、かつ時間対称的の場合に, Penrose 不等式の右辺を Reissner-Nordstr öm 解の質量 m を、その面積半径 r_0 と総電荷 q で表わした量で置き換えた. この不等式は、ブラックホール水平線の連結成分が 1 つ、つまり Σ が M 内の極小球面であるときは、逆平均曲率流を用いて証明された：

Theorem 8 (Jang [6], Huisken/Ilmanen [5], Khuri-Disconzi). (M, g, E) を優エネルギー条件 $(R_g \geq 2\|E\|_g^2)$ を満たす漸近平坦, 時間対称的なアインシュタイン・マックスウェル方程式のコーシー初期条件とする. さらに M のあるエンドに対する最外的極小曲面が 1 つの極小球面のみからなるとする. いま

(M,g,E) の ADM 質量を m、極小球面の面積半径を r_0、総電荷を q とするとき、以下の不等式が成立する：

$$m \geq \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{q^2}{r_0}\right).$$

さらに等式のときは、(M,g,E) は *Reissner-Nordström* 解の $\{t = 一定\}$ 超曲面に等長的である.

最外的極小曲面が複数の極小球面からなっているとき、この不等式が破られる状況が、複数のブラックホールがある Majumdar-Papapetrou 解を用いて構成された：

Theorem 9 (Weinstein–Yamada [13] 2005). 漸近平坦かつ時間対称的なアインシュタイン・マックスウェル方程式のコーシー初期条件 (M,g,E) で、最外的極小曲面が複数の極小球面からなり、かつ

$$m < \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{q^2}{r_0}\right).$$

を満たすものが存在する.

ここで Jang [6] と Gibbons [2] によって提唱された不等式 $m \geq 1/2(r_0 + q^2/r_0)$ は

$$m - \sqrt{m^2 - q^2} \leq r_0 \leq m + \sqrt{m^2 - q^2}.$$

と同値である. Penrose による宇宙検閲官予想は不等式 $r_0 \leq m + \sqrt{m^2 - q^2}$ のみを示唆する一方で、Weinstein–Yamada [13] の反例は $m - \sqrt{m^2 - q^2} \leq r_0$ を破るものであることに注意する.

以下の結果は、この状況証拠を整合的に説明する：

Theorem 10 (Khuri-Weinstein-Yamada [7]). (M,g,E) を優エネルギー条件 $(R_g \geq 2\|E\|_g^2)$ を満たす漸近平坦, 時間対称的なアインシュタイン・マックスウェル方程式のコーシー初期条件とする. いま (M,g,E) の ADM 質量を m、極小球面の面積半径を r_0、総電荷を q とするとき、以下の不等式が成立する：

$$r_0 \leq m + \sqrt{m^2 - q^2}$$

さらに等式のときは、(M,g,E) は *Reissner-Nordström* 解の $\{t = 一定\}$ 超曲面に等長的である.

不等式

$$r_0 \leq m + \sqrt{m^2 - q^2}$$

は以下の２つの不等式と同値である：

$$\begin{aligned} m &\geq |q| && \text{if } r_0 \leq q \\ m &\geq \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{q^2}{r_0}\right) && \text{if } q < r_0 \end{aligned}$$

上で紹介した Gibbons、Hawking、Horowitz、Perry [3] の結果から、不等式 $m \geq |q|$ は、q と r_0 の値に関わらず常に成り立っている．よって主定理を示すには不等式 $m \geq \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{q^2}{r_0}\right)$ を $q < r_0$ の場合に示せば良いことがわかる．条件 $q < r_0$ は、実は最外的極小曲面の安定性と対応していることが、証明のなかでは重要な点である．

ここまでにわれわれが見てきた不等式の族をまとめてみる：

$$\begin{array}{lcll} m & \geq & 0 & \\ m & \geq & \frac{1}{2} r_0 & \\ m & \geq & \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{q^2}{r_0}\right) & \text{if } r_0 \geq |q| \\ m & \geq & |q| & \text{if } r_0 < |q| \end{array}$$

これらの不等式が等式であるときは、それぞれアインシュタイン方程式およびアインシュタイン・マックスウェル方程式の厳密解が対応していることに注意する．またこれらの不等式には、ブラックホール地平線の位相的条件 (連結成分の数) が必要とされてないことは興味深い．

5.1 主定理の証明に現れる計量の共形変換について

この最後のセクションでは、主定理の証明の中の最も重要な計量の変形について紹介をする。

以下の $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ 上に定義されたリーマン計量の一変数族を考える：

$$g(t) = \mathcal{U}(t)^4 (dr^2 + r^2 d\omega^2).$$

ただしここで

$$\mathcal{U}(t) = e^{-t} + \frac{m}{2re^{-t}}.$$

とおく．これらの計量は皆 Schwarzschild 解であり、実際 $g(t)$ は、微分同相写像 $\phi_t : r \mapsto r \exp 2t$ による引き戻し計量 $\phi_t^* g(0)$ に他ならない．いま $u(t) = \mathcal{U}(t)/\mathcal{U}(0)$ とすると、$g(t) = u(t)^4 g(0)$ である．いま $x \to \infty$ のとき $v \to -1$ および $v(r_t) = 0$ を境界条件とする Dirichlet 問題の解

$$\triangle_{g(t)} v(t) = 0$$

によって、すべての t に対して $u(t) = \exp \int_0^t v(\tau) d\tau$ が得られることを確認する．ここで $r_0 = m/2$ とし、$r_t = r_0 e^{2t}$ で定義する．Schwarzschild 解は Flamm のモデルをみると、$r = r_0$ に関して $\mathbb{Z}_2$ の対称性があったことから、この Dirichlet 問題の解は、v の $r = r_0$ を中心とした奇関数としての拡張を介して $\mathbf{R}^3 \backslash \{0\}$ 全体に定義されると考えてよい．

同様にして $\mathbf{R}^3 \backslash \{0\}$ 上で、計量

$$g(t) = \mathcal{U}(t)^4 (dr^2 + r^2 d\omega^2)$$

を定義する．ここでは

$$\mathcal{U}(t) = \left(e^{-t} + \frac{m+Q}{2re^{-t}}\right)^{1/2} \left(e^{-t} + \frac{m-Q}{2re^{-t}}\right)^{1/2}$$

とする．

これらの計量は皆 Reissner-Nordström 解であり、実際 $g(t)$ は、微分同相写像 $\phi_t : r \mapsto r \exp 2t$ による引き戻し計量 $\phi_t^* g(0)$ である．いま $u(t) = \mathcal{U}(t)/\mathcal{U}(0)$ とすると、$g(t) = u(t)^4 g(0)$ である．いま各 t において、$x \to \infty$ のとき $v \to -1$ および $v(r_t) = 0$ を境界条件とする以下の Dirichlet 問題の解を考える．ここでは $r_0 = \sqrt{m^2 - q^2}/2$ とし、r_t を $r_0 e^{2t}$ で定義する．

$$\triangle_{g(t)} v(t) = \|E\|_{g(t)}^2 v(t)$$

このとき、共形因子 u は、v の時間積分として現れる：$u(t) = \exp \int_0^t v(\tau) d\tau$．電場がないときはこの関係は、上述の Schwarzschild 解の状況に帰着する．

Schwarzschild 解および Reissner-Nordström 解に関する以上の考察は、これらの正準的なリーマン計量がある種のソリトン解の構造を持っていることを明示している．主定理の証明では、この計量の発展を一般化してリーマン計量と電場を含む初期条件 (M, g, E) に対して、上で行った Dirichlet 問題を各 t で解くことで共形変換を時間連続的に行い、3次元多様体を変形する．この変形が Reissner-Nordström 解に収束することで、Penrose 型不等式が従う．この連続変形が以下の条件をみたすことを確認することで定理が従う．

- ∂M_t は最外極小曲面でその面積は時間不変 $|\partial M_t| = |\partial M|$ である.
- 総電荷 $q_t = q$ は時間不変.
- 質量は単調減少 $\frac{d}{dt}m_t \leq 0$ (正質量定理を用いる)
- 計量の族は Reissner-Nordstöm 解に収束
- Maxwell 条件 $\mathrm{div}_{g_t} E_t = 0$, および優エネルギー条件 $R_t \geq 2|E_t|^2$ は各時間で成立.
- $E = 0$ のときは H.Bray の変形に帰着.
- Reissner-Nordström 解は、この変形で（上述した $\phi_t : r \mapsto r \exp 2t$ のスケーリングを除いて）不変で $m_t = m_0$.

References

[1] H. Bray. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. *J. Differential Geometry*, 59:177–367, 2001.

[2] G. Gibbons. The isoperimetric and Bogomolny inequalities for black holes. In T.J. Willmore and N. Hitchin, editors, *Global Riemannian Geometry*, pages 194–202. John Wiley & Sons, New York, 1984.

[3] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, Gary T. Horowitz, and Malcolm J. Perry. Positive mass theorems for black holes. Comm. Math. Phys. 88(1983), 295–308.

[4] M. Heusler. *Black Hole Uniqueness Theorems* Cambridge Lecture Notes in Physics, 1996.

[5] G. Huisken and T. Ilmanen. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *J. Differential Geometry*, 59:352–437, 2001.

[6] P. Jang. Note on cosmic censorship. *Phys. Rev. D*, 20(4):834–837, 1979.

[7] M. Khuri, G. Weinstein and S. Yamada, The Riemannian Penrose Inequality with Charge for Multiple Black Holes, arxiv:1308.3771, 2013.

[8] M. Mars. Present status of the Penrose inequality. *Class. Quant. Grav.*, 26:193001, 2009.

[9] R. Penrose. Naked singularities. *Ann. New York Acad. Sci.*, 224:125–134, 1973.

[10] R. Schoen and S.-T. Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1):45–76, 1979.

[11] R. Schoen and S-T. Yau. Proof of the positive mass theorem. II. *Comm. Math. Phys.*, 79(2):231–260, 1981.

[12] R. Wald. *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.

[13] G. Weinstein and S. Yamada. On a Penrose inequality with charge. *Commun. Math. Phys.*, 257(3):703–723, 2005.

[14] E. Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 80:381–402, 1981. 10.1007/BF01208277.